# Lista de exercícios II – data de entrega: 14/10/2019

## Modelos Matemáticos em Ecologia e Evolução
## NE441 e F017

**1.** O modelo de Ricker é muito utilizado em Biologia para modelar a quantidade de pesca que pode ser sustentável. Ricker foi um dos cientistas mais influentes da ecologia marinha e que trabalhou com os salmões que sobem os rios do Canadá. Ricker quis modelar o canibalismo de ovos e larvas pelos próprios salmões parentais. Ele pressupôs que a mortalidade das larvas seria influenciada pelo canibalismo praticado pelos pais. Ele propôs então que a população de novos indivíduos (recrutas, $N(t+1)$) dependia do tamanho da população no tempo atual (estoque, $N(t)$), mas que havia um certo limite no recrutamento definido pela capacidade suporte. Ricker propôs a seguinte equação para modelar esse tipo de sistema:

$$N(t+1) = N(t)e^{r\left(1-\frac{N(t)}{K}\right)} \tag{1}$$

onde $r$ expressa a taxa de crescimento populacional e $K$ a capacidade suporte da população.

**a)** Encontre os pontos de equilíbrio deste modelo e determine suas estabilidades (responda aqui de acordo com os parâmetros do modelo se necessário).

**b)** Veja os gráficos a seguir (Figura 1). A reta pontilhada preta em ambos os gráficos indica a reta 1:1. A curva contínua em vermelho representa a equação dada na equação 1. No item **A**, colocamos os seguintes valores de parâmetros: $r = 1.1$, $K = 50$. No item **B**, os parâmetros são $r = 3.0$, $K = 70$. Determine os valores dos pontos indicados pela bolinha azul em A e B.

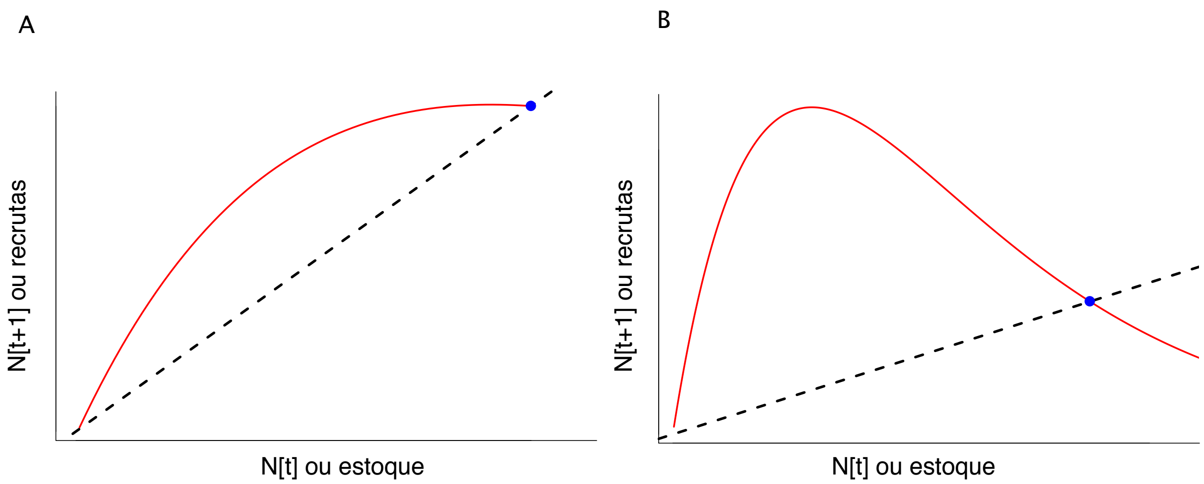


Figura 1: Em A, temos os parâmetros $r = 1.1$, $K = 50$. Em B, os parâmetros são $r = 3.0$, $K = 70$. A reta pontilhada preta em ambos os gráficos indica a reta 1:1, ou a linha de reposição.

**c)** O rendimento máximo sustentável (maximum sustainable yield, MSY, do inglês) é, teoricamente, o maior rendimento (ou quantidade de pesca) que pode ser obtido do estoque de uma espécie por um período indeterminado. Ou seja, se refere à quantidade máxima que pode ser retirada pois ela seria normalmente reposta na população. Identifique no gráfico abaixo qual dos valores (I, II ou III) se refere à esse rendimento máximo sustentável. Identifique também qual o tamanho populacional (a, b ou c) que devemos esperar que uma população de peixes atinja para se obter esse rendimento máximo sustentável.

**2.** A ilha de Komodo na Malásia é povoada por grandes répteis carnívoros que se alimentam de pequenos mamíferos que são herbívoros. Se assumimos que estes répteis gigantes não tem nenhum

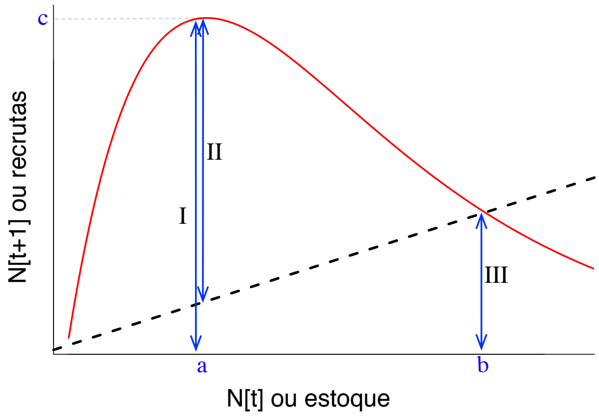


Figura 2: A reta pontilhada preta em ambos os gráficos indica a reta 1:1.

influência direta sobre a população de plantas e que as plantas competem entre si pelos recursos e nutrientes disponíveis no ambiente, o sistema de equações diferenciais que descreve esta situação pode ser dado por:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1(1 - bx_1 - cx_2) \tag{2}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -dx_2 + ex_1x_2 - fx_2x_3 \tag{3}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -gx_3 + hx_2x_3 \tag{4}$$

Os parâmetros $a, b, c, d, e, f, g, h$ são todos positivos. Com base neste modelo e em seus conhecimentos de interações ecológicas reais e teóricas, responda:

**a)** Quais populações as densidades $x_1$, $x_2$ e $x_3$ representam?

**b)** Explique o significado dos parâmetros $a, b, c, d, e, f, g, h$ do modelo.

**c)** Sob quais condições ecológicas que o termo $b = 0$ pode ser considerado uma situação plausível?

**d)** Considere que existe um ponto de equilíbrio em que $x_1 = 0$. Explique biologicamente quais os valores de $x_2$ e $x_3$ que são esperados neste ponto equilíbrio (não faça contas aqui. Procure entender o que $x_1 = 0$ causa em $x_2$ e $x_3$.

**e)** Mostre que se o ponto de equilíbrio do item acima (d) é estável, quais as relações entre os parâmetros que você espera. DICA: você pode usar o o traço da matriz jacobiana neste ponto de equilíbrio para estudar as condições dos parâmetros do modelo. Você também pode calcular os autovalores da matriz jacobiana neste ponto de equilíbrio

**f)** Interprete biologicamente o que significa a condição dos parâmetros do item acima (e).

**3.** O sistema de equações abaixo do modelo de Predador ($P$) - Presa ($V$) utiliza a forma funcional do tipo II em como as presas são consumidas pelos predadores:

$$\frac{dV}{dt} = rV - \frac{kVP}{d+V} \tag{5}$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{bVP}{d+V} - mP \tag{6}$$

Responda:

**a)** Interprete como a reposta funcional do tipo II altera o uso do recurso e como ela se difere da resposta funcional do tipo I (feito em aula)

**b)** Calcule os pontos de equilíbrio do sistema.

**c)** Avalie, graficamente (pela isoclinas), como é a estabilidade dos pontos de equilíbrio

**d)** Avalie pelo método da matriz Jacobiana (pelos seus autovalores) a estabilidade de todos os pontos de equilíbrio encontrados no item (b).
**DICA:** você pode usar o o traço e determinante de matrizes jacobiana 2x2 para entender as condições de equilibrio. O traço de uma matriz corresponde à soma dos elementos da diagonal da matriz ($tr(A) = a_{11} + a_{22}$). Em matrizes 2x2, sabemos que o traço corresponde à soma dos autovalores da matriz (isto é, $\lambda_1 + \lambda_2 = tr(A)$). Além disso, sabemos que o determinante de uma matriz 2x2 (det(A)=$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$) corresponde à multiplicação dos autovalores da matriz (isto é, ($\lambda_1\lambda_2 = det(A)$).

**e)** Considere que o crescimento das presas não é exponencial na ausência de predadores, como dado acima (Equação 5), e sim que ela cresce exponencialmente até um certo tamanho populacional, e a partir de então seu crescimento é mais lento até atingir uma certa capacidade suporte dada pelo ambiente. Considere que o termo de consumo dos predadores continua obedecendo a resposta funcional do tipo II como acima. O que vc acredita que acontece com o ponto de equilíbrio de coexistência de presas e predadores?