Introdução à teoria de jogos

Seleção no equilíbrio de H-W:

$$AA: \; p^2 \to p^2 W_{AA} \to \frac{p^2 W_{AA}}{\bar{W}}$$

$$Aa: \; 2pq \to 2pq\, W_{Aa} \to \frac{2pq\, W_{Aa}}{\bar{W}}$$

$$aa: \; q^2 \to q^2 W_{aa} \to \frac{q^2 W_{aa}}{\bar{W}}$$

$$\bar{W} = p^2 W_{AA} + 2p(1-p) W_{Aa} + W_{aa}(1-p)^2$$

$$p' = f_{AA} + \tfrac{1}{2} f_{Aa} = \frac{p^2 W_{AA}}{\bar{W}} + \frac{p(1-p) W_{Aa}}{\bar{W}}$$

$$\begin{aligned} W_{AA} &= 1-s \\ W_{Aa} &= 1 \\ W_{aa} &= 1-t \end{aligned} \quad \to \quad \bar{W} = 1 - t + 2pt - p^2(t+s)$$

Equilíbrio

$\bar{p} = 0 \to$ só $\underline{\underline{a}}$, estável se $t<0$

$\bar{p} = 1 \to$ só $\underline{A}$, estável se $s<0$

$\bar{p} = \dfrac{t}{t+s} \to$ existe se $t, s > 0$ ou $t, s < 0$, estável se $0 < st < \frac{2}{3}($

$\Downarrow$

$t, s > 0$

APENAS

p/ $t = s$ obtem

$$0 < s^2 < \frac{4s}{3} \text{ ou } \boxed{0 < s < 4/3}$$

As equações para p' e q' podem ser reescritas [da] seguinte forma. Definimos uma matriz de seleção para [os] alelos:

	A	a
A	W_{AA}	W_{Aa}
a	W_{Aa}	W_{aa}

de tal forma que o encontro de A/A tem um peso W_{AA}, de A/a, W_{Aa} etc.

O fitness de A é então

$$f_A = \underset{\text{fração de } A}{p}\;\underset{\text{peso}}{W_{AA}} + \underset{\text{fração de } a}{(1-p)}\;\underset{\text{peso}}{W_{Aa}}$$

e

$$f_a = (1-p)\, W_{aa} + p\, W_{Aa}$$

O fitness médio da população é $\phi = f_A p + f_a (1-p)$

e

$$p' = \frac{f_A}{\phi}\, p \qquad q' = \frac{f_a}{\phi}\, q$$

que são as mesmas equações anteriores.

Vamos agora introduzir seleção e fitness nos phenótipos. Sejam C e D dois comportamentos, ou estratégias, que os indivíduos podem assumir

Matriz de payoff

	C	D
C	a	b
D	c	d

GANHOS DE C

$C + C \to a$
$C + D \to b$

GANHOS DE D

$D + C = c$
$D + D = d$

Se x = fração de C
y = " de D $= 1 - x$

Indivíduos C ganham $xa + yb \equiv f_C$
Indivíduos D " $xc + yd = f_D$
GANHO MÉDIO $\phi = x f_C + y f_D$

$$X_{n+1} = \frac{f_C}{\phi} x_n$$

$$y_{n+1} = \frac{f_D}{\phi} y_n$$

; $x_n + y_n = 1 \Rightarrow X_{n+1} + y_{n+1}$

Equação para x

$$x_{n+1} = \frac{f_C x_n}{\phi}$$

No equilíbrio $x_{n+1} = x_n$, ou

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = \left(\frac{f_C - \phi}{\phi}\right) x_n = 0$$

$$f_C - \phi = f_C - [x f_C + (1-x) f_D]$$

$$= f_C (1-x) - (1-x) f_D$$

$$= (1-x)(f_C - f_D)$$

Então

$$\Delta x_n = \frac{x_n (1-x_n)(f_C(x_n) - f_D(x_n))}{\phi}$$

Os pontos de equilíbrio são dados por

$$x = 0$$

$$x = 1$$

soluções de $f_C(x) = f_D(x)$

• $x = 0$

A estabilidade de $x=0$ (onde só temos a estratégia D) é dado pelo comportamento de Δx para $x = 0 + \delta x$:

$$\Delta X_n \simeq \frac{\delta x_n (1-\delta x_n)\left(f_C(\delta x_n) - f_D(\delta x_n)\right)}{\phi(\delta x_n)}$$

$$\simeq \frac{\delta x_n \left(f_C(0) - f_D(0)\right)}{\phi(0)}$$

$f_C(0) = b$

$f_D(0) = d$

$\phi(0) = d$

$$\Delta x_n \simeq \left(\frac{b-d}{d}\right) \delta x_n$$

Se $b < d$ $x=0$ (D) é estável.

Isso implica que uma população D não pode ser "invadida" por "mutantes" do tipo C.

• $x = 1$

Neste caso a população é composta por Δ's com a estratégia C apenas. Fazendo

$$x = 1 - \delta x$$

$$\Delta x_n = \frac{(1 - \delta x_n)(-\delta x_n)\left(f_C(1 - \delta x_n) - f_D(1 - \delta x_n)\right)}{\phi(1 - \delta x_n)}$$

$$\simeq \frac{-\delta x_n \left(f_C(1) - f_D(1)\right)}{\phi(1)} = \frac{\delta x_n \left(f_D(1) - f_C(1)\right)}{\phi(1)}$$

$$\begin{aligned} f_C(1) &= a \\ f_D(1) &= c \\ \phi(1) &= a \end{aligned} \implies \Delta x_n \simeq \frac{(c - a)}{a}\delta x_n$$

Se $c < a$ $x = 1$ (C) é estável.

• solução $\bar{x}$ de $f_C(\bar{x}) = f_D(\bar{x})$

$$a\bar{x} + b(1-\bar{x}) = c\bar{x} + d(1-\bar{x})$$

$$\bar{x}\left[(a-b)-(c-d)\right] = d-b$$

$$\boxed{\bar{x} = \frac{d-b}{(a-b)-(c-d)}}$$

fazendo $x = \bar{x} + \delta x$

$$\Delta x_n = \frac{(\bar{x}+\delta x)(1-\bar{x}-\delta x)\left[\cancel{f_C(\bar{x})} + f_C'(\bar{x})\delta x - \cancel{f_D(\bar{x})} - f_D'(\bar{x})\delta x\right]}{\phi(\bar{x}+\delta x)}$$

$$\simeq \frac{\bar{x}(1-\bar{x})\left(f_C'(\bar{x}) - f_D'(\bar{x})\right)\delta x}{\phi(\bar{x})}$$

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ é estável se $f_C'(\bar{x}) < f_D'(\bar{x})$

Tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x} = (f_C - \phi)\, x \\ \dot{y} = (f_D - \phi)\, y \end{cases}$$

$$\dot{x} + \dot{y} = \frac{d}{dt}(x+y) = 0 \Rightarrow \phi = x f_C + y f_D$$

$$\boxed{\dot{x} = x(1-x)(f_C - f_D)}$$

Equilibrio

$x = 0$

$x = 1$

$f_C(x^*) = f_D(x^*)$. $\qquad x^* = \dfrac{d-b}{(a-b)-(c-d)}$

$$g(x) = x(1-x)(f_C - f_D)$$

$$g'(x) = (1-x)(f_C - f_D) - x(f_C - f_D) + x(1-x)(f_C' - f_D')$$

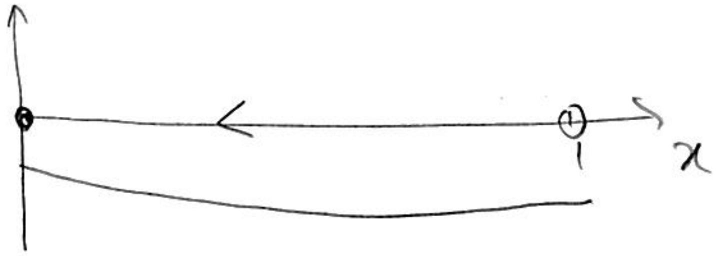
$$g'(0) = f_C - f_D = b - d$$

$$g'(1) = -(f_C - f_D) = c - a$$

$$g'(x^*) = x^*(1-x^*)\left(f_C'(x^*) - f_D'(x^*)\right) = x^*(1-x^*)\left[(a-b)-(c-d)\right]$$

$$= -x^*(1-x^*)\left[(b-d)+(c-a)\right]$$

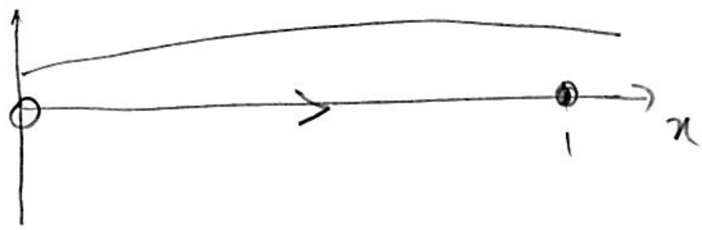
Cenários



$x=0$ estável (D)

$f_C < f_D$ sempre

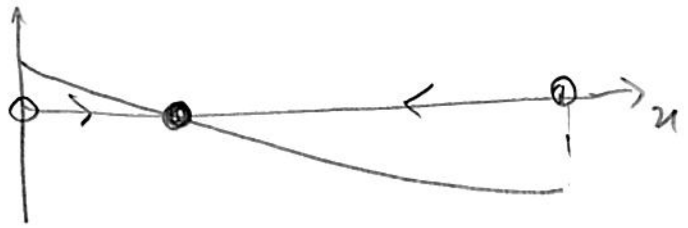
$b<d$; $c>a$



$x=1$ estável (C)

$f_C > f_D$ sempre

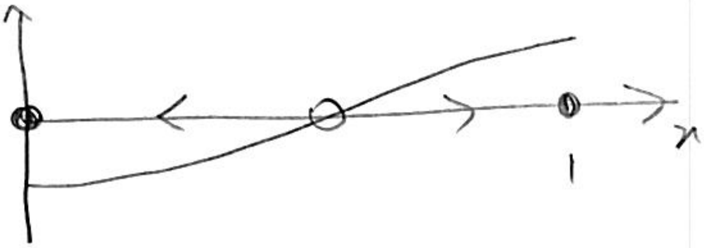
$c<a$; $b>d$



x^* estável

$x=0$ e $x=1$ instáveis

$b>d$, $c>a$



x^* instável

$x=0$ e $x=1$ estáveis

$b<d$; $c<a$