# Competição

Modelo de 1 espécie admitem competição intra-específica

- $X_{n+1} = r X_n (1 - X_n/K)$

- $X_{n+1} = \dfrac{K X_n}{b + X_n}$ ; $\dfrac{K}{b} = r$ p/ $x_n << b$

- $X_{n+1} = X_n \exp\{r(1 - x_n/K)\}$

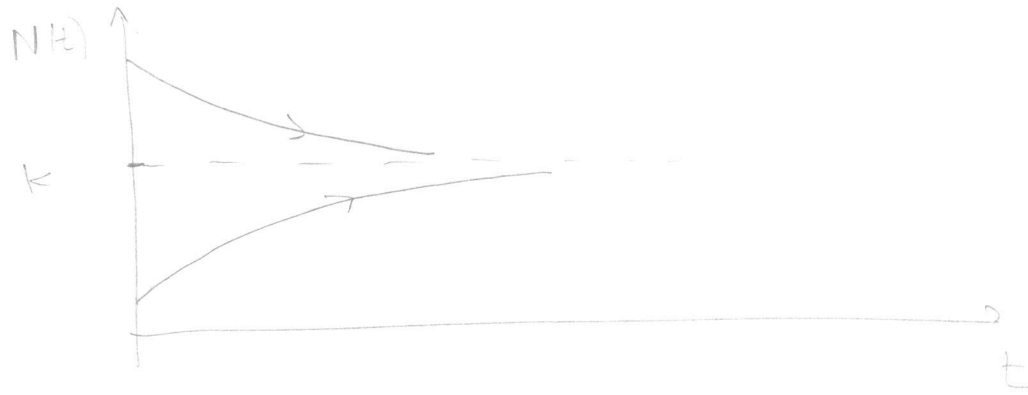
- $X_{n+1} = \dfrac{K X_n}{(1 + a X_n)^b}$

Modelo com 2 ou mais espécies admitem competição inter-específica. Vamos trabalhar mais não com modelos contínuos:

1 espécie

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(\frac{K-N}{K}\right)$$

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$$




## 2 Espécies

intra    inter

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left( \frac{K_1 - N_1 - f(N_2)}{K_1} \right) \quad ; \quad f(N_2) = \alpha N_2$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left( \frac{K_2 - N_2 - f(N_1)}{K_2} \right) \quad ; \quad f(N_1) = \beta N_1$$

$\alpha = 1$, cada ind. 2 equivale a um ind. 1

$\alpha = 4$, cada ind. 2 " " 4 " 1

$\alpha < 1$ interspecif. é menos importante que intra-especif.

Assumimos $K_1 \neq K_2$ e

$r_1 \neq r_2$    embora espécies 1 e 2 vivam na mesma área.

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{r_1}{K_1} N_1 \left( K_1 - N_1 - \alpha N_2 \right)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{r_2}{K_2} N_2 \left( K_2 - N_2 - \beta N_1 \right)$$

Solución de equilibrio

$$\bar{N}_1 = K_1 - \alpha \bar{N}_2$$
$$\bar{N}_2 = K_2 - \beta \bar{N}_1$$

ou

$N_1 = 0 \; ; \; N_2 = K_2$

ou

$N_1 = K_1 \; ; \; N_2 = 0$

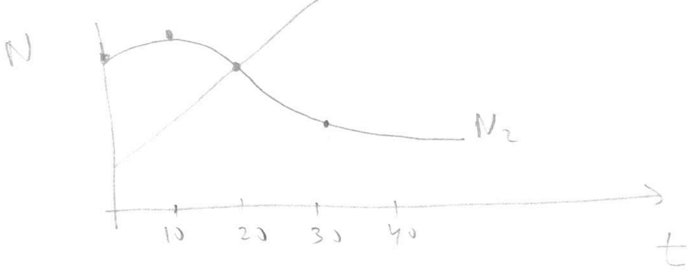
resolvendo $\Rightarrow$

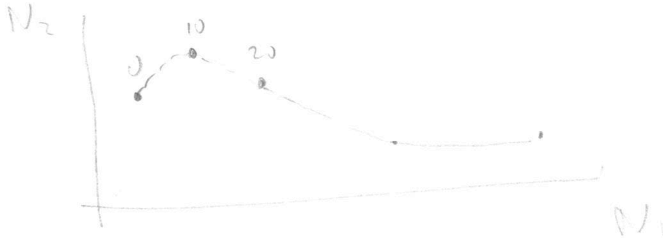
$$\bar{N}_1 = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}$$

$$\bar{N}_2 = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta}$$

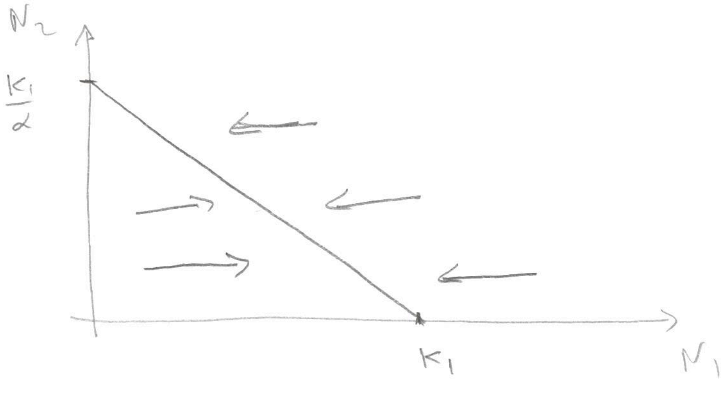
$\Rightarrow \boxed{\alpha\beta < 1}$

Espaço de Estados




Isóclinas




$\bar{N}_1 = K_1 - \alpha \bar{N}_2$ —

POPULAÇÃO $N_1$

Como $\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} = \frac{r_1}{K_1}\left[K_1 - N_1 - \alpha N_2\right] = \frac{r_1}{K_1}\left[K_1 - (N_1 + \alpha N_2)\right]$

se $N_1 + \alpha N_2 < K_1$ $N_1$ cresce

se $N_1 + \alpha N_2 > K_1$ $N_1$ decresce

Então, p/ $N_1 = N_2 \simeq 0 \Rightarrow N_1$ cresce

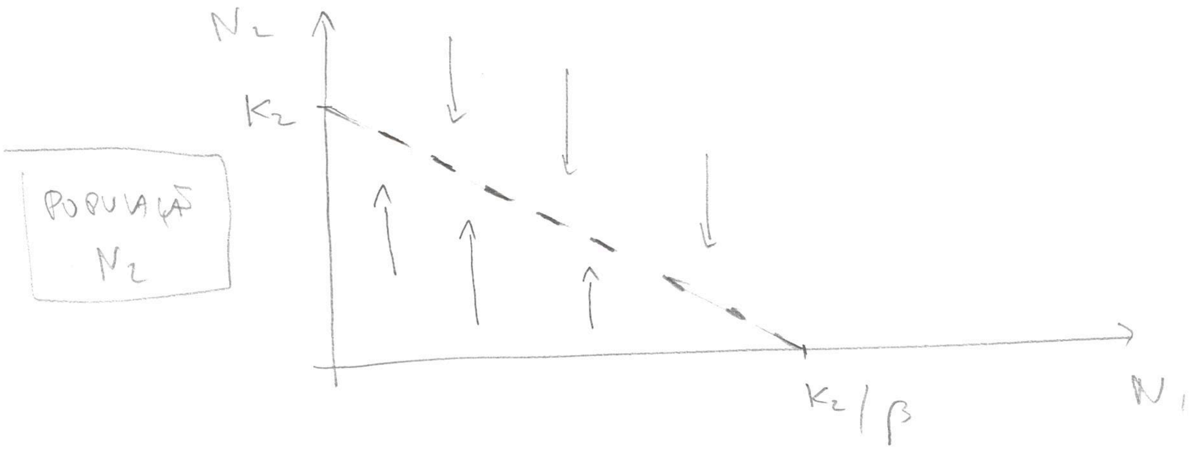
p/ $N_2 \simeq 0$, $N_1 > K_1 \Rightarrow N_1$ decresce

Para $N_2$ teremos

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} = \frac{r_2}{K_2}\left[K_2 - (N_2 + \beta N_1)\right]$$

$N_2 = K_2 - \beta N_1$ p/ equilíbrio

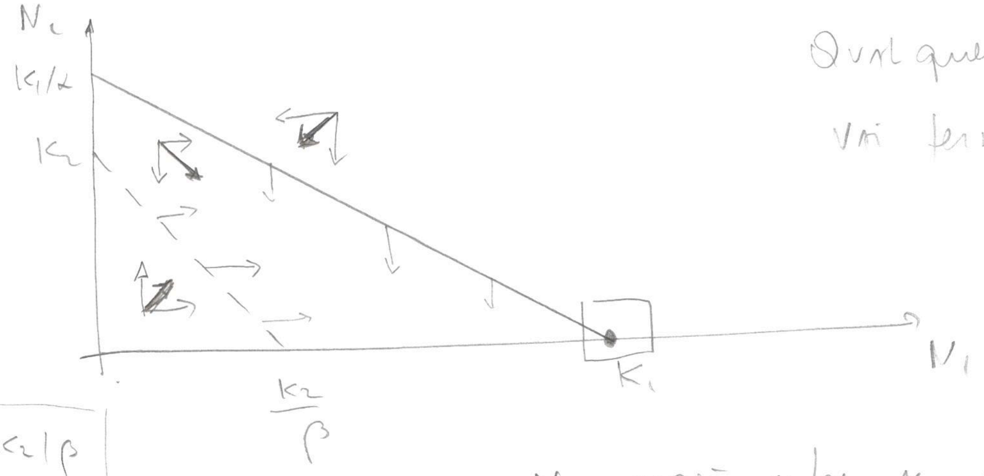
se $N_2 + \beta N_1 < K_2$ $N_2$ cresce




Se as duas retas se intersectarem na região onde $N_1$ e $N_2$ são positivos teremos uma solução de equilíbrio com convivência das espécies.

# 4 SITUAÇÕES

(A)



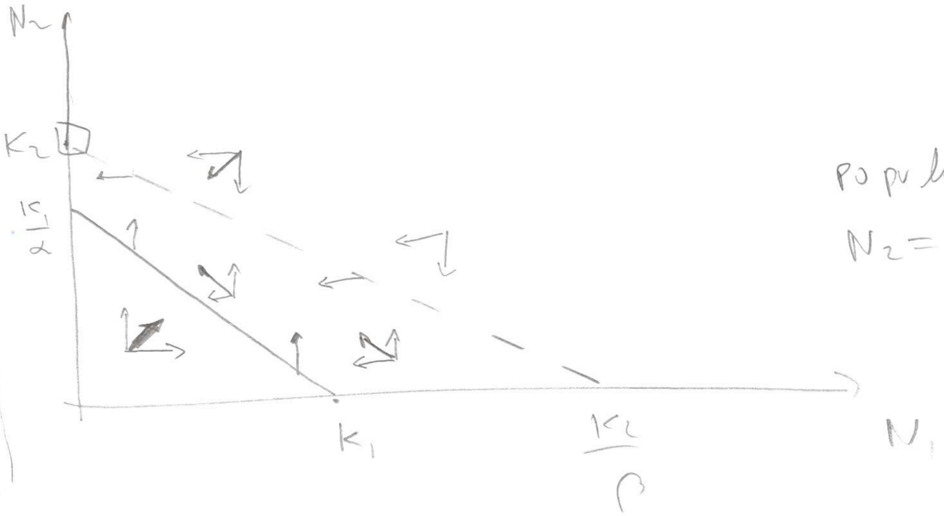

Qualquer condição inicial vai terminar em $N_1 = K_1$
$N_2 = 0$

$K_1 > K_2/\beta$

$\frac{K_1}{\alpha} > K_2$

Na região entre as retas a população $N_1$ aumenta (abaixo de ———) e $N_2$ diminui (acima de - - - -).

(B)

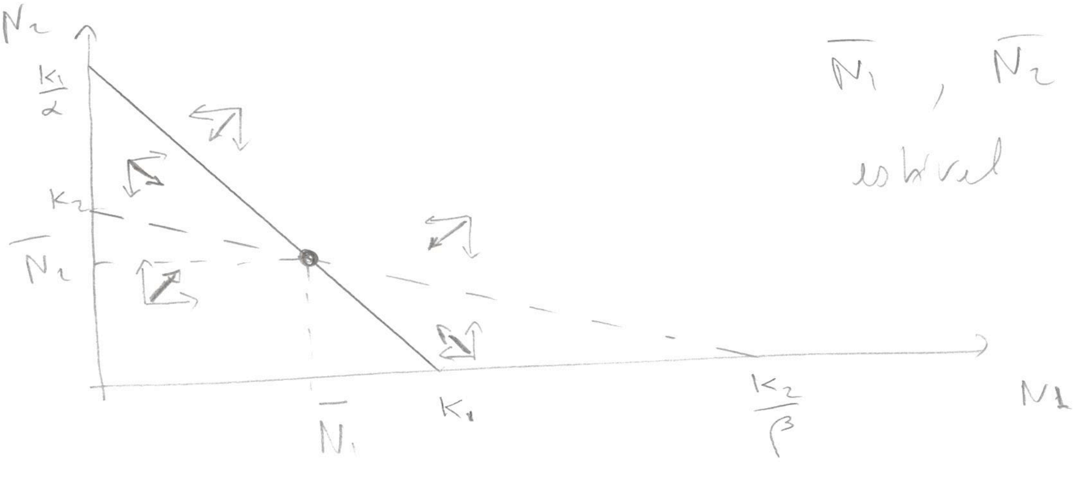



população converge p/ $N_2 = K_2$ ; $N_1 = 0$

$\frac{K_2}{\beta} > K_1$

$K_2 > \frac{K_1}{\alpha}$

(C)

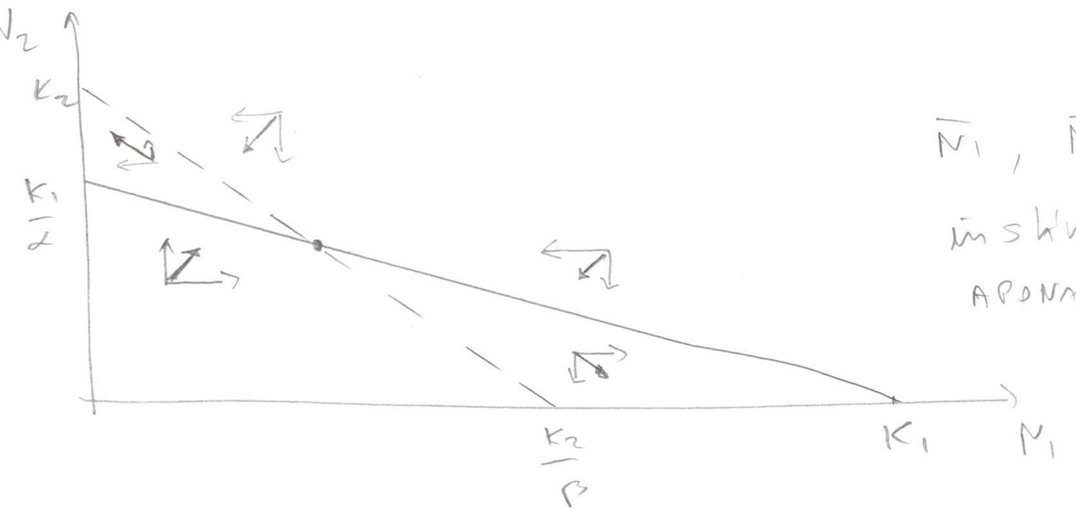



$\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$ é estável

$\frac{K_2}{\beta} > K_1$

$\frac{K_1}{\alpha} > K_2$

(d)




$K_1 > \frac{K_2}{\beta}$

$K_2 > \frac{K_1}{\alpha}$

$\bar{N}_1, \bar{N}_2$ é instável e apenas uma das espécies vai sobreviver

## Compilação dos Resultados e Análise Qualitativa

- $N_1$ terá sucesso se crescer mesmo que

$$N_1 \simeq 0$$
$$N_2 = K_2$$

Nesse caso

$$K_1 - (N_1 + \alpha N_2) \approx K_1 - \alpha K_2 > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{K_1}{K_2} > \alpha}$$

e $N_1$ irá "invadir" a população $N_2$

(veja (A) e (C))

- $N_2$ terá sucesso se crescer mesmo que

$$N_2 \approx 0$$
$$N_1 \simeq K_1$$

(veja (B) e (D))

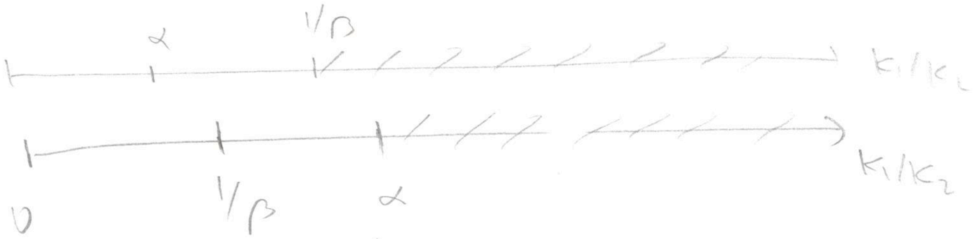
ou se

$$K_2 - (N_2 + \beta N_1) \approx K_2 - \beta K_1 > 0$$

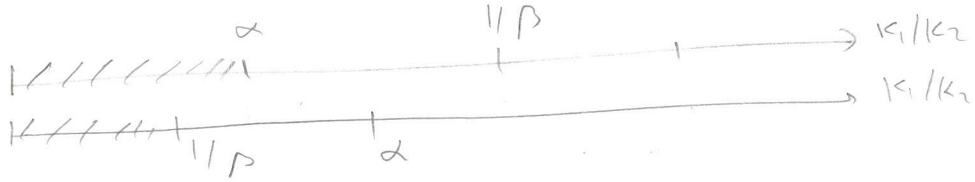
$$\Rightarrow \boxed{\frac{K_1}{K_2} < \frac{1}{\beta}}$$

| Espécie 1 persiste | Espécie 2 persiste | Condição | Resultado |
|---|---|---|---|
| SIM | NÃO | $\frac{1}{\beta} < \frac{K_1}{K_2} > \alpha$ | Espécie 1 ganha |
| NÃO | SIM | $\frac{1}{\beta} > \frac{K_1}{K_2} < \alpha$ | Espécie 2 ganha |
| SIM | SIM | $\frac{1}{\beta} > \frac{K_1}{K_2} > \alpha$ | co-existência estável |
| NÃO | NÃO | $\frac{1}{\beta} < \frac{K_1}{K_2} < \alpha$ | Equilíbrio instável |

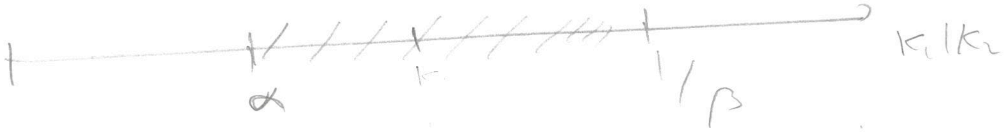
(1)




(2)




(3)




$\frac{1}{\beta} > \alpha$

(4)

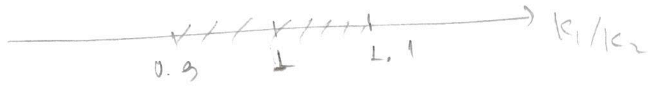

$\frac{1}{\beta} < \alpha$

## Exemplos

(a) $\alpha = \beta = 0.9$ → espécies usam recursos de forma similar

co-existência possível apenas se

$$1{,}1 < \frac{K_1}{K_2} < 0.9$$ → intervalo estreito




(b) $\alpha = \beta = 0.2$ → uso de recursos é bem diferente, e elas afetam a outra fracamente

$$5 < \frac{K_1}{K_2} < 0.2$$

# Predação Intraguilda - (IGP)

BESOURO TRIBOLIUM → competem por comida mas apresentam canibalismo em altas densidades

- $N_1$ e $N_2$ competem por recursos
- $N_1$ é o predador de $N_2$

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left( \frac{K_1 - N_1 - \alpha N_2}{K_1} \right) + \gamma N_1 N_2$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left( \frac{K_2 - N_2 - \beta N_1}{K_2} \right) - \delta N_1 N_2$$

- Note o sinal positivo em $\gamma N_1 N_2$ ⇒ ganho p/ a espécie 1
- TAXA de encontro $N_1$ x $N_2$
- ganho (taxa de conversão entre consumo de presas e filhotes)
- $\delta$ = taxa de ataque.

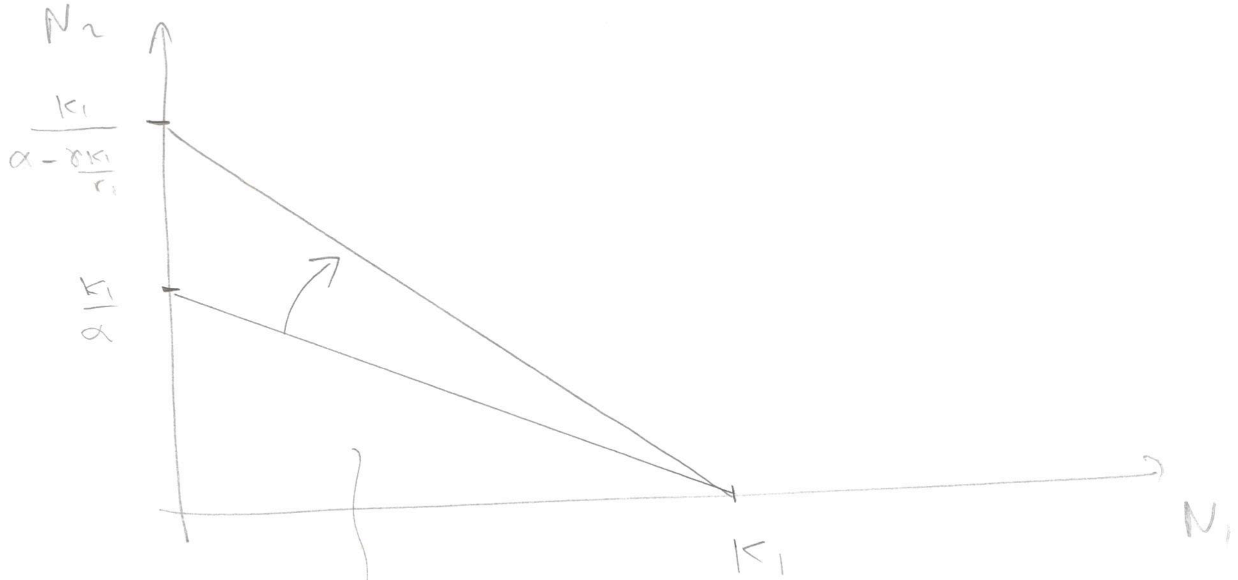
$$\frac{1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} = \frac{r_1}{K_1}\left[K_1 - N_1 - \alpha N_2 + \frac{\gamma K_1}{r_1} N_2\right]$$

↑ novo termo

equilíbrio $\qquad K_1 = N_1 + N_2\left(\alpha - \gamma K_1/r_1\right)$

se $N_2 = 0 \longrightarrow N_1 = K_1$

se $N_1 = 0 \longrightarrow N_2 = \dfrac{K_1}{\alpha - \gamma K_1/r_1} > \dfrac{K_1}{\alpha}$




Região de crescimento de $N_1$ aumenta

$$\frac{1}{N_2}\frac{dN_2}{dt} = \frac{r_2}{K_2}\left[K_2 - N_2 - \beta N_1 - \frac{\delta K_2}{r_2} N_2\right]$$

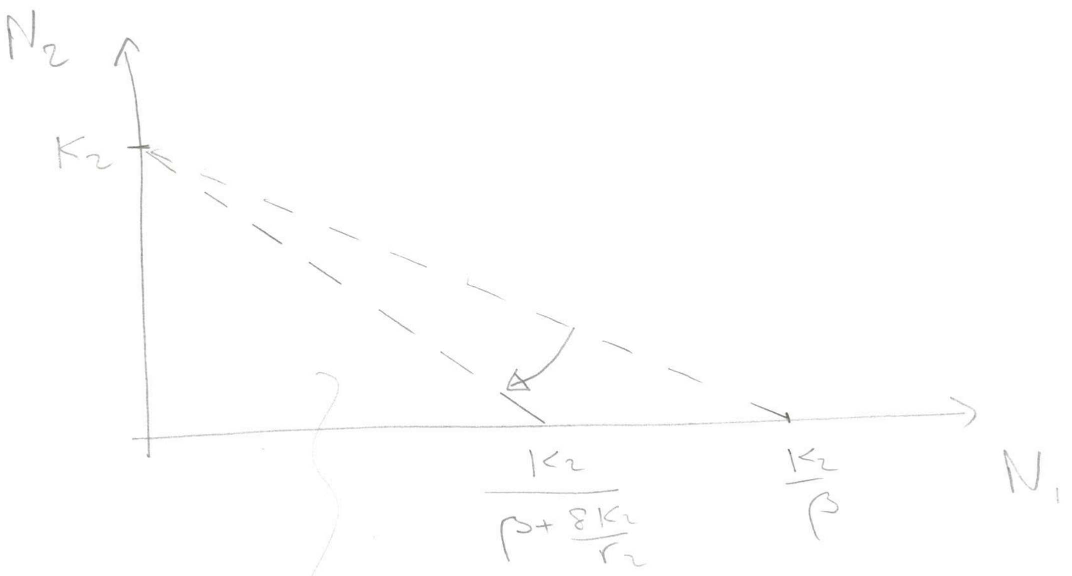
novo termo

equilíbrio

$$K_2 = N_2 + N_1\left(\beta + \frac{\delta K_2}{r_2}\right)$$

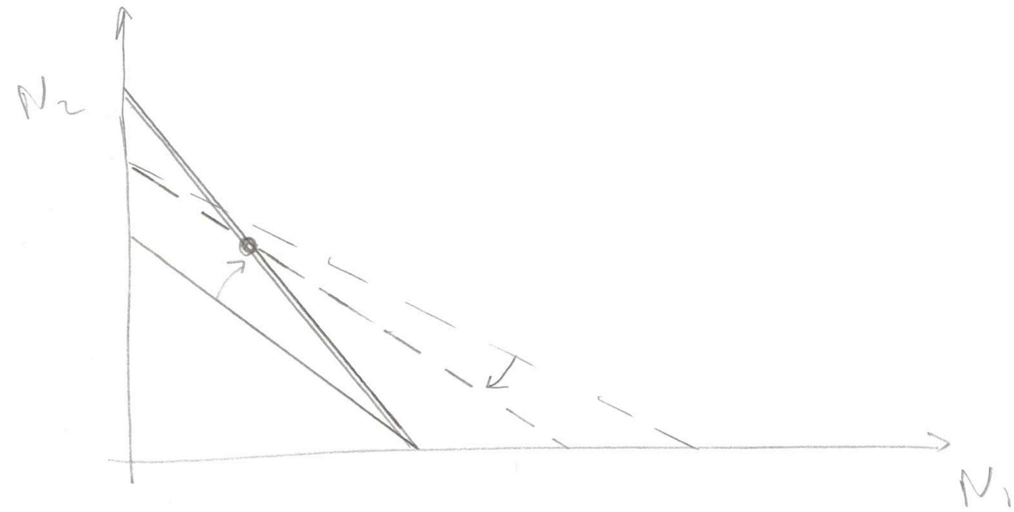
se $N_1 = 0$ $\quad N_2 = K_2$

se $N_2 = 0$ $\quad N_1 = \dfrac{K_2}{\beta + \frac{\delta K_2}{r_2}} < \dfrac{K_2}{\beta}$




→ região onde $N_2$ cresce diminui.

Como exemplo vamos tomar o caso (B) onde $N_2 \to K_2$ e $N_1 \to 0$ e acrescentam IGP




Apareceu agora um pto de equilíbrio estável!

Vamos calcular seu valor: As novas equações são

$$\bar{N}_1 = K_1 - \alpha' \bar{N}_2$$
$$\bar{N}_2 = K_2 - \beta' \bar{N}_1$$

com

$$\alpha' = \alpha - \gamma K_1 / r_1 < \alpha$$
$$\beta' = \beta + \delta K_2 / r_2 > \beta$$

Então

$$\bar{N}_1 = \frac{K_1 - \alpha' K_2}{1 - \alpha' \beta'}$$

$$\bar{N}_2 = \frac{K_2 - \beta' K_1}{1 - \alpha' \beta'}$$

# Outra Maneira de Analisar

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[ \frac{K_1 - N_1 - \alpha' N_2}{K_1} \right]$$

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[ \frac{K_2 - N_2 - \beta' N_1}{K_2} \right]$$

$n_1 = N_1 / K_1 \qquad n_2 = N_2 / K_2$

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{1}{K_1} \frac{dN_1}{dt} = r_1 \left( \frac{N_1}{K_1} \right) \left[ 1 - \frac{N_1}{K_1} - \alpha' \frac{N_2}{K_1} \right]$$

$$\boxed{\frac{dn_1}{dt} = r_1 n_1 \left( 1 - n_1 - \alpha' n_2 / R \right)} \; ; \quad \boxed{R = K_1 / K_2}$$

$$\boxed{\frac{dn_2}{dt} = r_2 n_2 \left( 1 - n_2 - \beta' n_1 R \right)}$$

Equilíbrio

$$\overline{n_1} = \frac{1 - \alpha' / R}{1 - \alpha' \beta'}$$

$$\overline{n_2} = \frac{1 - \beta' R}{1 - \alpha' \beta'}$$

que vem de

$$\begin{cases} 1 - n_1 - \dfrac{\alpha' n_2}{R} = 0 \\ 1 - n_2 - \beta' n_1 R = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dn_1}{dt} = a_1 n_1 - b_1 n_1^2 - c_1 n_1 n_2 = f(n_1, n_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_1} = a_1 - 2b_1 n_1 - c_1 n_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_2} = -c_1 n_1$$

$$\frac{dn_2}{dt} = a_2 n_2 - b_2 n_2^2 - c_2 n_1 n_2 = g(n_1, n_2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial n_1} = -c_2 n_2$$

$$\frac{\partial g}{\partial n_2} = a_2 - 2b_2 n_2 - c_2 n_1$$

$$n_1 = \overline{n}_1 + m_1$$
$$n_2 = \overline{n}_2 + m_2$$

$$\begin{cases} \dfrac{dm_1}{dt} = (a_1 - 2b_1 \overline{n}_1 - c_1 \overline{n}_2) m_1 - c_1 \overline{n}_1 m_2 \\[2ex] \dfrac{dm_2}{dt} = -c_2 \overline{n}_2 m_1 + (a_2 - 2b_2 \overline{n}_2 - c_2 \overline{n}_1) m_2 \end{cases}$$