$$E[X] = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$ onde p_i é a frequência de cada uma das n categorias

$$Var[X] = E\left[(X-\bar{X})^2\right] = E[X^2] - E[X]^2 =$$

$$= E[X^2] - \bar{X}^2$$

$$Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$= E[XY] - \bar{X}\bar{Y}$$

se $Y = \alpha + \beta X \Rightarrow Cov[X,Y] = \beta_{Y,X} Var[X]$

Algumas propriedades importantes que usamos:

$$E[cX] = cE[X] = c\bar{X}$$

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[XY] = E[XY] = Cov[X,Y] + E[X]E[Y] =$$

$$= Cov[X,Y] + \bar{X}\bar{Y}$$

$$Cov[X,Y] + Cov[X,W] = Cov[X, Y+W]$$

$$E[(X-\bar{x})(Y-\bar{y})] + E[(X-\bar{x})E(W-\bar{W})]$$

$$E[XY] - \bar{X}E[Y] - \bar{Y}E[X] + \bar{X}\bar{Y} + E[XW] - \bar{X}E[W] - \bar{W}E[X] + \bar{X}\bar{W}$$

$$E[XY] - \bar{X}\bar{Y} + E[XW] - \bar{X}\bar{W}$$

$$= E[XY + XW] - \bar{X}[\bar{Y} + \bar{W}] =$$

$$= E[X\underbrace{(Y+W)}] - \bar{X}[\underbrace{\bar{Y}+\bar{W}}] = Cov[X,Z]$$ onde $Z = Y+W$

(1.5)

$$\mathrm{Cov}[X, 2Y] =$$

$$E[(X-\overline{X})(2Y-2\overline{Y})] = E[\boxed{2}(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})] =$$

$$= 2E[(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})] =$$

$$= 2\,\mathrm{Cov}[X,Y]$$

②

Na aula passada, assumimos que

$$\phi_{ij} = \phi_i + \delta_{ij}$$ onde i é o ancestral e j é o j-ésimo descendente de i.

ϕ é característica

$$\bar{\phi}' = \frac{1}{N\bar{W}}\left[\sum_{i=1}^{N} W_i\phi_i + \sum_{j=1}^{W_i} W_i\,\delta_i^M\right]$$

$$= \frac{1}{\bar{W}}\left(E[W\phi] + E[W\delta^M]\right)$$

$$\bar{\phi}' = \frac{1}{\bar{W}}\left(\mathrm{Cov}[W,\phi] - \bar{W}\bar{\phi} + E[W\delta^M]\right)$$

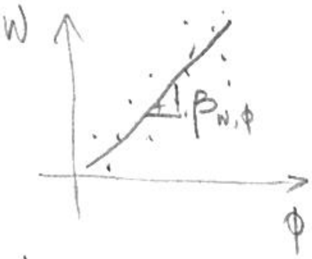
$$= \frac{1}{\bar{W}}\left(\mathrm{Cov}[W,\phi] + E[W\delta^M]\right) - \bar{\phi}$$

$$\Delta\bar{\phi} = \frac{1}{\bar{W}}\left(\underbrace{\mathrm{Cov}[W,\phi]}_{\text{como característica muda c/ mortalidade/rep diferencial e deriva}} + \underbrace{E[W\delta^M]}_{\text{processos que envolvem rep. (mutações, recombinações) e seleção em menor nível de organização}}\right)$$ EQ. de Price

Ignorando 2º termo, vimos que

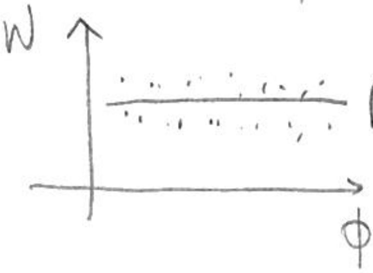
se $\beta_{W,\phi}$ é o coef angular de W e ϕ

$$\underbrace{\Delta\bar{\phi} = \frac{1}{\bar{W}}\mathrm{Cov}[W,\phi]} \Rightarrow \underbrace{\Delta\bar{\phi} = \frac{1}{\bar{W}}\beta_{W,\phi}\,\mathrm{Var}[\phi]}$$



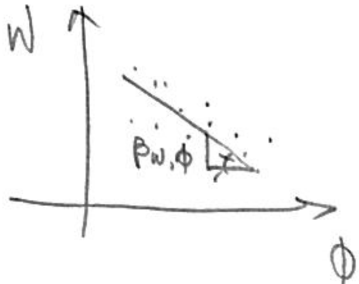
$\beta_{W,\phi} > 0 \Rightarrow \Delta\bar{\phi}$ é > 0 (pois $Var[\phi] > 0$ sempre)

↳ Média da característica aumenta



$\beta_{W,\phi} = 0 \Rightarrow \Delta\bar{\phi}$ não muda (está em equilíbrio)

↳ Média da característica ñ muda.



$\beta_{W,\phi} < 0 \Rightarrow \Delta\bar{\phi} < 0$

↳ Média da característica diminui.

Sempre que média da característica se altera em alguma direção (aumentando ou diminuindo), dizemos que há seleção direcional.

$$\Delta Var[\phi] = \frac{1}{\bar{W}}\left(Cov[W,(\phi-\bar{\phi})^2] + E[W(\phi-\bar{\phi})^2] \right)$$

Olhando novamente somente p/ o 1.º termo (seleção)

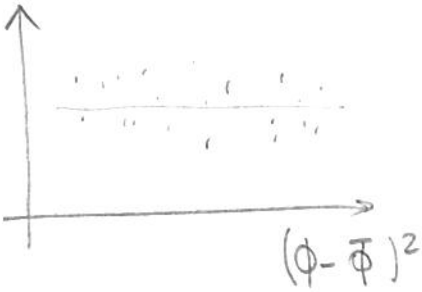
Vimos que

$$\Delta Var[\phi] = \frac{1}{\bar{W}}\,\beta_{W,(\phi-\bar{\phi})^2}\,\underbrace{Var[(\phi-\bar{\phi})^2]}_{\text{termo sempre } > 0}$$

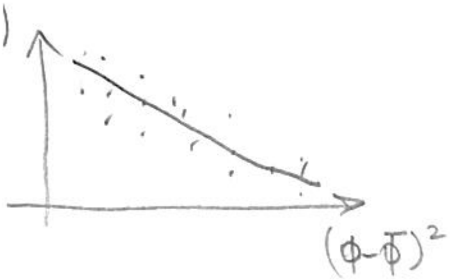
$\beta_{W,(\phi-\bar{\phi})^2} > 0 \Rightarrow \Delta Var[\phi] > 0$

↳ variância da característica aumenta ...

(4)



$\beta_{w,(\phi-\bar{\phi})^2} = 0 \Rightarrow \Delta Var(\phi)$ não muda



$\beta_{w,(\phi-\bar{\phi})^2} < 0 \Rightarrow \Delta Var(\phi)$ diminui

↳ variância da característica diminui

selecção estabilizadora

$$\Phi_i^o = \phi_i + \delta_i^M \quad (\star)$$

$$\Delta\bar{\Phi} = \frac{1}{\bar{w}}\left(Cov[w,\phi] + E[w\,\delta^M] \right)$$

$$= \frac{1}{\bar{w}}\left(Cov[w,\phi] + Cov[w,\delta^M] + \bar{w}\ \bar{\delta}_{TOTAL} \right)$$

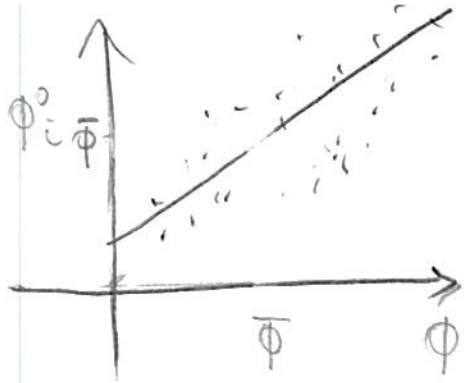
$$= \frac{1}{\bar{w}}\left(Cov[w,\phi] + Cov[w,\delta^M] + \bar{\delta}_T \right)$$

$$= \frac{1}{\bar{w}}\left(Cov[w, \underbrace{\phi + \delta^M}_{\phi^o}] + \bar{\delta}_T \right)$$

Por $(\star)$: $\bar{\delta}_T = \bar{\phi}^o - \bar{\phi}$

⑤

$$\phi_i^o = \alpha + \beta \phi_i$$



na ausência de seleção e deriva a média da população não muda

Então se $\phi_i = \bar{\phi} \Rightarrow \phi_i^o = \bar{\phi}$

$$\bar{\phi} = \alpha + \beta\bar{\phi} \Rightarrow \alpha = \bar{\phi}(1-\beta)$$

Mas para um indivíduo genérico, como fica?

$$\phi_i^o = \alpha + \beta\phi_i$$

$$\phi_i^o = \bar{\phi}(1-\beta) + \beta\phi_i$$

$$\phi_i^o = \bar{\phi} + \beta_{\phi^o;\phi}(\phi_i - \bar{\phi})$$

$$\Delta\bar{\phi} = \frac{1}{\bar{w}}\left[\mathrm{Cov}[w, \phi^o] + \bar{\delta}_T\right] \qquad \mathrm{Cov}(w,\phi) = C_0$$

$$\phi^o = \bar{\phi} + \beta(\phi - \bar{\phi}) = \bar{\phi}(1 - \beta_{\phi^o;\phi}) + \beta_{\phi^o;\phi}\phi$$

$$\Delta\bar{\phi} = \frac{1}{\bar{w}}\left(\mathrm{Cov}[w, \underbrace{\bar{\phi}(1-\beta_{\phi^o;\phi})}_{cte} + \beta_{\phi^o;\phi}\phi] + \delta_T\right)$$

$$\Delta\bar{\phi} = \frac{1}{\bar{w}}\left(\cancelto{0}{\mathrm{Cov}[w, cte]} + \mathrm{Cov}[w, \beta_{\phi^o;\phi}\phi] + \delta_T\right)$$

$$\Delta\bar{\phi} = \frac{1}{\bar{w}}\left(\beta_{\phi^o;\phi}\mathrm{Cov}[w,\phi] + \delta_T\right)$$

$\frac{1}{\overline{w}} Cov[w, \phi] = S$ (diferencial de selecção)

$$\underbrace{\Delta \overline{\phi}}_{R} = \underbrace{\beta_{\phi^o, \phi}}_{h^2} \underbrace{\frac{1}{\overline{w}} Cov[w, \phi]}_{S} + \cancel{\delta_T}^{0}$$

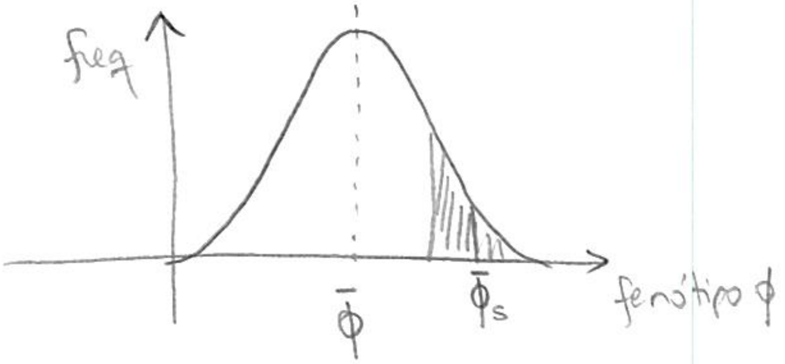
↳ resposta à selecção

$$\boxed{R = h^2 S}$$ (Breeder's Equation
Eq do criador)

↳ sentido estrito de heridabilidade
regressão do fenótipo dos descendentes em relação ao fenótipo parental

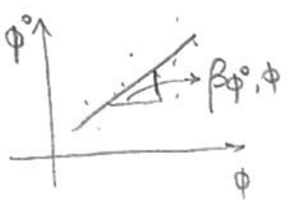
No sentido amplo, heridabilidade é proporção da variância total do fenótipo que é devida à variação genética. Mas nos modelos utilizamos o sentido estrito de heridabilidade.

Na prática é utilizada da seguinte forma:



$R = \overline{\phi}^o - \overline{\phi}$ ou $\overline{\phi}' - \overline{\phi}$

h^2 é



$S = ?$

$$S = \overline{\phi}_s - \overline{\phi} = \frac{1}{\overline{w}} Cov[w,\phi] = \underbrace{\frac{1}{\overline{w}} E[w\phi]}_{?} - \frac{\overline{w}\,\overline{\phi}}{\overline{w}}$$

Esta parte evidencia uma seleção artificial, muitas vezes utilizada por criadores/agricultores e é como se aptidão/fitness dos não selecionados fosse nula.

NÃO SELECIONADOS P/ REP | SELECIONADOS P/ REP $= \overline{\phi}$

$\overline{\phi}_s$

$\overline{\phi}_s - \overline{\phi} = S$

$\Delta\overline{\phi}$

SÃO FILHOS SÓ DOS SELECIONADOS $= \overline{\phi}^{\circ}$

$$S = \overline{\phi}_s - \overline{\phi} = \frac{1}{\overline{w}} Cov[w,\phi] = \frac{1}{\overline{w}} E[w\phi] - \frac{\overline{w}\,\overline{\phi}}{\cancel{\overline{w}}}$$

$$\frac{1}{\overline{w}} E[w\phi]$$

$$\overline{w} = \sum_{i=1}^{N} w_i / N$$

$$E[w\phi] = \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i\phi_i}{N}$$

$$\frac{\cancel{N}}{\sum_{i=1}^{N} w_i} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} w_i\phi_i}{\cancel{N}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_s} \phi_i}{N_s} = \overline{\phi}_s$$

se cada um dos selecionados tem 1 filho, então $\sum_{i=1}^{N} w_i = N_s < N$

e $\sum_{i=1}^{N} w_i\phi_i = \sum^{N_s} \phi_i$